代数幾何学シンポジウム記録
1998年度　pp.123-128

ラグランジュ部分多様体と ホモロジー的ミラー対称性

深谷賢治

京都大学理学部

この講演の目的は以下の表のあらわすホモロジー的ミラー対称性予想についての研究の報告である。ホモロジー的ミラー対称性はコンセビッチ（[K1], [K2]）により1993ごろ提出された。

シンプレクティック幾何学	複素幾何学
シンプレクティック多様体(M,Ω) より正確には$\Omega=\omega+\sqrt{-1}B$でωはシンプレクティック形式Bは閉２次形式	複素多様体$(M^\vee,J)$
ラグランジアン部分多様体L より正確にはLとその上の平坦直線束$\mathcal{L}\to L$の組。 さらに正確には、$\mathcal{L}\to L$は複素直線束とその上の接続∇で曲率が$F_\nabla=2\pi\sqrt{-1}B$を満たすもの。	連接層$\mathcal{F}$ より正確には連接層の圏の導来圏の対象
フレアーホモロジー $HF((L_1,\mathcal{L}_1),(L_2,\mathcal{L}_2))$	$Ext(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$
フレーホモロジーの積 （ドナルドソン1992）	米田積
高次の積 （深谷[F1]）	（高次の）マッセイ米田積
ラグランジアン手術	Resolution, Quiver, Monad

対応はもっとあるが、ここでは述べない。

Polishchuk-Zaslow [PZ]は予想を　T^2の場合に直接計算でチェックした。深谷は昨年アーベル多様体の場合に部分的にチェックした。

Mをキャラビ・ヤウ多様体とする。これの上の有理曲線の数を数え、その母関数を調べると、これが、Mのミラー$M^\vee$の湯川積すなわち層係数コホモロジーの積になる、というのがキャンデラスたちの予想であった。（ギベンタールらがいくつかの場合に示した。）

我々の状況では、Mとラグランジュ部分多様体L_iがある。概正則円盤D^2でL_iに境界を持つものの母関数が、フレーホモロジーの積あるいは高次の積であり、これが、層係数コホモロジー$M^\vee$の積構造に一致するというのが、ホモロジー的ミラー対称性予想である。

1．ブレーン理論との関係

ブレーン（Brane）にについて述べる。

Aモデルと呼ばれるものでのブレーンは、ラグランジュ部分多様体と平坦ベクトル束の組$(L,\mathcal{L})$と考えられている。

Bモデルでは、連接層がブレーンと考えられている。

M上のAモデルと$M^\vee$上のBモデルが一致する、というのは、ブレーン付きのミラー対称性であるが、ホモロジー的ミラー対称性予想に一致する。

ストロミンジャー・ヤウ・ザスロ([SYZ])はこれが、ミラー$M^\vee$の構成法を与えることに注意した。これを幾何学的ミラー対称性予想とよぶ。

Bモデル$M^\vee$の0ブレーンつまり1点に当たる層(Skyscraper sheaf）のモジュライのモジュライが$M^\vee$自身であることに注意する。ホモロジー的ミラー対称性予想を仮定すれば、これから次のことがでてくる。

予想1（[SYZ]）：　$M^\vee$はMのラグランジアン部分多様体と平坦ベクトル束の組$(L,\mathcal{L})$のモジュライのある連結成分に一致する。

2．ラグランジアン交叉のフレアーホモロジー

ラグランジアン交叉のフレアーホモロジーとはラグランジュ部分多様体$L_i \subseteq M$に対して、次数付きアーベル群$HF(L_1,L_2)$を与えるものである。たとえば、

$$\sum(-1)^k \operatorname{rank}_R HF^k(L_1,L_2) = L_1 \bullet L_2\text{、（交点数）}$$

などを満たしていることが要請される。そのようなものは、

フレアー（Floer）[Fl] 1 によって、$\pi_2(M,L_i)=0$の場合に構成され
オー（Oh）[O]によって、モノトーンラグランジュアンというクラスに対して構成された。

深谷・コンセビッチ・オー・小野・太田の共同研究では次のこうとが示されている。

定理１　L**がスピン構造を持つとき、偶数次のコホモロジーに値を持つ障害類** $o_i(L) \in H^{even}(L,\boldsymbol{Q})$ **が帰納的に定義され、** $o(L_1)=o(L_2)=0$ **のとき求める性質をもつ、フレアーホモロジー** $HF(L_1,L_2)$ **が定義される。**

どのような意味で不変量であるかなどかなり微妙である。３でもう少しのべる。

２．族のフレアーホモロジーとホモロジー的ミラー対称性

組$(L,\mathcal{L})$に対してそのミラーとなるべき$M^{\vee}$上の連接層$\mathcal{E}(L,\mathcal{L})$を構成せよ、というのは、ホモロジー的ミラー対称性の重要な一部であるが、族のフレアーホモロジーを使った次のようなアプローチが可能である。

以下$M=T^{2n}$とする。より一般の場合も似た考え方が可能であるが、さらに様々な困難が発生する。

普遍被覆空間$\tilde{M}=\boldsymbol{R}^{2n}$のラグランジュアン線型部分空間$\tilde{L}_{pt}$をとる。$\Gamma=\pi_1(T^{2n})$とし、$\tilde{L}_{pt}/\Gamma\cap\tilde{L}_{pt}\cong T^n$と仮定する。$v\in T^{2n}/\left(\tilde{L}_{pt}/\Gamma\cap\tilde{L}_{pt}\right)$に対して、$\tilde{L}_{pt}/\Gamma\cap\tilde{L}_{pt}$を平行移動することで　ラグランジュアントーラスが決　まる。これを　$L_{pt}(v)$とかく。$\sigma\in Hom(\Gamma\cap\tilde{L}_{pt},U(1))$を決めると、$L_{pt}(v)$の上の平坦直線束が決まる。予想１は今の場合は次のようになる。（この場合は証明できる。）

$$T^{2n\vee}=\{(L(v),\sigma)\}.$$

さて、Lを$M=T^{2n}$上の別のラグランジュ部分多様体、$\mathcal{L}\to L$をその上の平坦ベクトル束とする。$\mathcal{E}(L,\mathcal{L})$は次のように構成される。簡単のため、$\mathcal{E}(L,\mathcal{L})$が$L_{pt}(v)$と横断的な場合を書くがそうでなくてもよい。

定義１　$\mathcal{E}(L,\mathcal{L})_{(L(v),\sigma)}=HF^n((L(v),\sigma),(L,\mathcal{L}))$.

右辺でv,σを動かしたものに正則ベクトル束の構造を入れなければならない。この部分が本質的である。それには、実は、$L_{pt}(v)$と横断的なもう一つのラグランジュアントーラスL_{st}をとっておく必要がある。$L_{pt}(v)$は$T^{2n\vee}$のscyscraper shaefに対応したが、L_{st}は$T^{2n\vee}$の構造層に対応する。

じつは、一般の$(L,\mathcal{L})$だと（定理1の障害が消えていても）、フレアーホモロジーを定義する境界作用素が形式的べき級数としてしか定義されず、従って定義１には問題がある。Lが線型（アファイン）あるいはそれからラグランジュ部分多様体の手術で得られるもの（で定理1の障害が消えているもの）ならば、収束がある意味で証明でき定義１が正当化される。

以上の定義の元で[F2]の主定理を述べる。（$(L_i,\mathcal{L}_i)$をアファインあるいはそれからラグランジュ部分多様体の手術で得られるものとする。）

定理２： $HF((L_1,\mathcal{L}_1),(L_2,\mathcal{L}_2))\cong Ext(\mathcal{E}(L_1,\mathcal{L}_1),\mathcal{E}(L_2,\mathcal{L}_2))$。

定理３： 次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc}
HF((L_1,\mathcal{L}_1),(L_2,\mathcal{L}_2)) & & Ext(\mathcal{E}(L_1,\mathcal{L}_1),\mathcal{E}(L_2,\mathcal{L}_2)) \\
\otimes & \cong & \otimes \\
HF((L_2,\mathcal{L}_2),(L_3,\mathcal{L}_3)) & & Ext(\mathcal{E}(L_2,\mathcal{L}_2),\mathcal{E}(L_3,\mathcal{L}_3)) \\
\downarrow m_2 & & \downarrow \\
HF((L_1,\mathcal{L}_1),(L_3,\mathcal{L}_3)) & \cong & Ext(\mathcal{E}(L_1,\mathcal{L}_1),\mathcal{E}(L_3,\mathcal{L}_3))
\end{array}$$

証明の主要点は、トーラスへの、境界値が与えられたアファインなラグランジュ部分多様体上にあるような、概正則円盤の数の数え上げ問題である。

これは、$\boldsymbol{C}^n$に持ち上げることによって解かれる。要点の一つは、２次関数のモース理論への帰着である。

結論として、そのような概正則円盤の数から得られる母関数は、テータ関数及びその一般化（多重テータ関数）になる。

３．ラグランジュアン部分多様体のモジュライ空間とA^∞代数。

Mのラグランジュアン多様体（+直線束）と$M^\vee$の層のモジュライが一致するというのが、予想であるから、その局所構造の一致がでなければならない。ここで問題になるのが、ラグランジュアン多様体のモジュライは安直に考えるといつも$H^1(L)$に局所的に同型で特異点がないことである。層のモジュライには一般には特異点が存在する。これに答えるのが定理１の障害理論である。この点を説明する。

本節の内容は深谷・コンセビッチ・オー・小野・太田の共著論文[FKOOO]のある一つのChapterの解説である。

まずホモロジー代数を少し説明する。Cを次数付き可群、とし、$(\Pi C)^k=C^{k+1}$とおく。

定義２ A^∞代数とは

$$m_k:\Pi C^{\otimes k}\to \Pi C$$

なる次数-1の写像の族であって（$k=0,1,2,\cdots$）、

$$d_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\sum\pm x_1\otimes\cdots\otimes m_k(x_i\otimes\cdots\otimes x_{i+k-1})\otimes\cdots\otimes x_n$$
$$\hat{d}=d_0+d_1+\cdots$$

とおいたとき

$$\hat{d}^2 = 0$$

を満たすものを指す。

Cがある局所環Λ上の可群であって、極大イデアルmで割って考えたとき

$$\begin{cases} 0 \equiv m_0 \equiv m_3 \equiv m_4 \equiv \cdots & \mod m \\ m_1 \equiv \partial & \mod m \\ m_2 \equiv \bullet & \mod m \end{cases}$$

（ここで$(\overline{C},d,\bullet)$は微分代数（DGA））となっているときを、微分代数$(\overline{C},d,\bullet)$のA^∞変形とよぶ。

定理4　**Lがスピン構造を持つラグランジアン部分多様体のとき、Lのコホモロジー環を与える微分代数$(\overline{C}(L),\partial,\cap)$の、$A^\infty$変形$(C(L),m_k)$が存在する。**

定理の証明は、Lに境界を持つ点付き概正則円盤の数を数えてなされる。量子コホモロジー環の構成とよく似ている。

一般にA^∞代数に対して、$m_1 m_1 = 0$は成立しない。これはm_0が0でないからである。m_1のホモロジーがフレアーホモロジー$HF(L,L)$であるべきなので、m_0がその定義の障害に当たる。

$b \in (\Pi C)^0$に対して、$e^b = 1 + b + b \otimes b + \cdots$とおき

$$\partial_b(x) = m(e^b x e^b) = \sum m_*(b \cdots bxb \cdots b)$$

とおく。

補題　$\hat{d}b = 0$と$\partial_b^2 = 0$は同値である。

定義3　$\mathcal{M}(L) = \left\{ b \middle| \hat{d}e^b = 0 \right\} / \sim$.（同値関係の定義は略す。）

$\mathcal{M}(L)$がLの無限小変形を支配していると思われる。

定理5　**$\mathcal{M}(L)$はLのハミルトン同相で不変である。**

$b_i \in \mathcal{M}(L_i)$とすると、フレアーホモロジー$HF((L_1,b_1),(L_2,b_2))$がさだまりL_iのハミルトン同相で不変である。

その他の性質は省略する。

定理5にもとづき、ホモロジー的ミラー対称性予想のモジュライ空間に関わる部分は次のように述べられる。簡単のため、$M^\vee$は複素次元3のシンプレクティック多様体とする。

予想2　$\mathcal{M}(L)$が空でなければ、Lのミラー$\mathcal{E}(L)$が存在し、$\mathcal{M}(L)$は、$M^\vee$での層のモジュライ空間の$\mathcal{E}(L)$でのformal schemeの意味での近傍と一致する。

注　　我々に証明できているのは、Λがある種の形式的べき級数環（ノビコフ環）である場合なので、$\mathcal{M}(L)$はformal schemeである。

3次元に限ったのは、一般の次元では、ふつうのモジュライではなく拡大モジュライ空間を考える必要があるからである。

ラグランジュ部分多様体の手術の考察により、トーラスの場合のいくつかの場合に、（アファインでない場合で）、予想3がチェックできる。2で書いたアイデアがすべてうまくいけば一般でよいはずであるが、まだまだ問題が多い。

参考文献

[F1]　K.Fukaya, *Morse homotopy, A_∞ category and Floer homologies*, Proc. of Garc. Workshop, Seoul national Univ. 1993.

[F2]　K.Fukaya, *Mirror symmetry of Abelian variety and multitheta functions*, preprint, 1998.

[FKOOO]　K.Fukaya, M.Kontsevich, Y.Oh, K.Ohta, K.Ono, *Anomally in Lagrangian intersection Floer theory,* in preparation.

[Fl]　A.Floer, *Morse theory for Lagrangian intersection*, J.Diff. Geom. 1988, 28 513 - 547.

[K1]　M.Kontsevich, *Homological algebras in mirror symmetry*, Proceeding of International Congress Zürich 1994.

[K2]　M.Kontsevich, *A_∞-algebras in mirror symmetry,* preprint.

[O]　Y.Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersection and pseudoholomorphic disks, I,II,* Commun. Pure. App. Math. 1993 46 949 - 993 and 995 - 1012

[PZ]　Polishchuk-Zaslow, *Categorical Mirror symmetry - the elliptic curve*. hep-th 9801119

[SYZ　Strominger-Yau-Zaslow, *Mirror symmetry is a T-duality,* hep-th 9612121.